微分積分方程式の数値解法について (発展方程式とその数値解析研究会報告集)

相波, 清子

数理解析研究所講究録
32巻 1967年 85-106

微分積分方程式の数値解法について

航空宇宙技術研究所　相波清子

まえがき

$$
\begin{aligned}
&u_x - f(x, y, u, u_y, u_{yy}, \textstyle\int u\,dy) = 0 && (x, y) \in G \\
&u(x, y) = \zeta(x, y) && (x, y) \in \Gamma
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

ここで領域は簡単のために矩形としておく。筆者は(1.1)型の方程式の数値解法について考察し R. Krawczyk が

$$u_x - f(x, y, u, u_y, u_{yy}) = 0$$

に対してやった[1]と同様な方法で方程式(1.1)の差分近似方程式に対しても Nagumo-Westphal の補助定理 Difference Analogue が成立することを証明し、これを使って差分方程式の(1.1)の真の解への収束、誤差評価などをした。これにより ある種の境界層方程式の数値解法は正当化されることになる。

ここでは次のような notation を用いる。

$$\Delta u_{i\cdot k} = u_{i\cdot k} - u_{i-1\cdot k} \quad , \quad \delta u_{i\cdot k} = u_{i\cdot k+1} - u_{i\cdot k-1}$$

$$\nabla^2 u_{i\cdot k} = u_{i\cdot k+1} - 2u_{i\cdot k} + u_{i\cdot k-1}$$

差分方程式の定義される領域の内点をI，境界点をR.

§1. 微分積分方程式に対するNagumo Westphalの定理

次に書くものは微分積分方程式(1.1)にNagumo Westphalの補助定理が成立するための関数fの条件である([2]による)。(1.1)に対して立てた差分方程式に対してNagumo Westphalが成立するための関数fの条件と比較するために書いておく。$\int u dy$の部分のfの条件については筆者が[2]につけ加えたものである。

次のようなnotationを導入する

$R_T = \{t \mid 0 < t \leq T\}$　　$R_{0T} = \{t \mid 0 \leq t \leq T\}$

Tが$+\infty$のとき

$R_T = \{t \mid t > 0\}$　　$R_{0T} = \{t \mid t \geq 0\}$

定理

u, vとfは次の条件を満足する関数であるとする。

(i) $u(x,t),\ v(x,t) \in C^1$　　$x \in [a,b],\ t \in R_{0T}$

(ii) $u(x,t),\ v(x,t)$はxについて二回連続微分可能。ここで　$x \in (a,b),\ t \in R_{0T}$

(iii) $v(x,0) \leq u(x,0)$

(iv)

(V) $f(x,t,u,u_x,u_{xx},\int u\,dx)\in C^1$ $u_{xx},\int u\,dx$ に関して非減少。

(VI) $f(x,t,v,v_x,v_{xx},\int v\,dx)-v_t \geq f(x,t,u,u_x,u_{xx},\int u\,dx)-u_t$

$x\in(a,b)$ $t\in R_T$

以上の(i)〜(VI)までが満たされれば関数 u,v の間には

$v(x,t)\leq u(x,t)$ すべての $x\in[a,b]$ $t\in R_{0T}$

§2 差分方程式に対する Nagumo Westphal の定理

$$\Delta W_{i\cdot k}/h=f(x_i,y_k,W_{i\cdot k},\delta W_{i\cdot k}/2l,\nabla^2 W_{i\cdot k+1}/l^2,\ l\sum_{m=0}^{k-1}W_{i-1\cdot m})\quad (x_i,y_k)\in I \qquad (2.1)$$

$$w_{i\cdot k}-W_{i\cdot k}=0 \quad (x_i,y_k)\in R$$

(2.1)は Implicit method による差分方程式である。

この解 $W_{i\cdot k}$ に対する優関数劣関数を考えてみよう。

[註] (2.1)では　積分 $\int u\,dy$ が矩形公式で表わされているがこれを台形公式 $\sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{u_{i-1\cdot m}+u_{i-1\cdot m+1}}{2}\right)$ を使ってもよい。§2以下の章でもすべて台形公式に直しても estimate は表現をすこしかえるだけでよろしい。

$$\Delta V_{i\cdot k}/h\geq f(x_i,y_k,V_{i\cdot k},\delta V_{i\cdot k}/2l,\nabla^2 V_{i\cdot k+1}/l^2,\ l\sum_{m=0}^{k-1}V_{i-1\cdot m})\quad (x_i,y_k)\in I \qquad (2.2)$$

$$V_{i\cdot k}-W_{i\cdot k}\geq 0 \quad (x_i,y_k)\in R$$

$$\Delta v_{i\cdot k}/h \leq f(x_i, y_k, v_{i\cdot k}, \delta v_{i\cdot k}/2l, \nabla^2 v_{i\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1} v_{i\cdot m}) \qquad (x_i, y_k)\in I$$

$$v_{i\cdot k} - W_{i\cdot k} \geq 0 \qquad (x_i, y_k)\in R \qquad (2.3)$$

を満す数値集合 $\{V_{i\cdot k}\}$, $\{v_{i\cdot k}\}$ が差分方程式 (2.1) の解 $\{w_{i\cdot k}\}$ との間に

$$v_{i\cdot k} \leq w_{i\cdot k} \leq V_{i\cdot k} \qquad (x_i, y_k)\in I+R \qquad (2.4)$$

なる関係があるためには関数 $f(x_i, y_k, r, s, t, p)$ への仮定の外に mesh h, l にさらに条件をつけ加えなければならない。

関数 $f(x_i, y_k, r, s, t, p)$ に対する仮定 (Implicit method)

関数 $f(x_i, y_k, r, s, t, p)$ は $(x_i, y_k)\in I$, $-\infty < r, s, t, p < +\infty$ で定義されていて次の (a), (b), (c), (d) を満す定数 $\alpha > 0$, $B \geq 0$, $E \geq 0$ が存在する。mesh h, l と定数との間には (イ), (ロ) のような関係があるとする。

(a) $\alpha(\bar{t} - t) \leq f(x_i, y_k, r, s, \bar{t}, p) - f(x_i, y_k, r, s, t, p) \quad \bar{t} \geq t, \alpha > 0$

(b) $|f(x_i, y_k, \bar{r}, s, t, p) - f(x_i, y_k, r, s, t, p)| \leq B|\bar{s} - s| \quad \bar{s} \geq s, B \geq 0$

(c) $f(x_i, y_k, \bar{r}, s, t, p) - f(x_i, y_k, r, s, t, p) \geq C(\bar{r} - r) \quad C > 0$ (2.5

(d) $f(x_i, y_k, r, s, t, \bar{p}) - f(x_i, y_k, r, s, t, p) \geq E(\bar{p} - p) \quad E \geq 0$

(イ) $\alpha - lB/2 > 0$

(2.6)

(ロ) $1 - hC > 0$

定理

差分方程式 (2.1) に対し関数 $f(x, y, r, s, t, p)$ は (2.5) を満た

し mesh h, ℓ は(2.6)を満たすとする。数値集合$\{V_{i\cdot k}\}$, $\{v_{i\cdot k}\}$が各々(2.2)と(2.3)の不等式を満たすとすれば，これ等は各々差分方程式の解の優関数・劣関数である．つまり(2.4)が成立する。

〔証明〕

$$V_{i\cdot k}-w_{i\cdot k}=\varphi_{i\cdot k}$$

と置く。(2.1)と(2.2)から

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{i\cdot k}/h \geq\ & f(x_i, y_k, V_{i\cdot k}, \delta V_{i\cdot k}/2\ell, \nabla^2 V_{i\cdot k+1}/\ell^2, \ell\sum_{m=0}^{k-1} V_{i-1\cdot m}) \\ & -f(x_i, y_k, w_{i\cdot k}, \delta w_{i\cdot k}/2\ell, \nabla^2 w_{i\cdot k+1}/\ell^2, \sum_{m=0}^{k-1} w_{i+1\cdot m})\end{aligned} \tag{2.7}$$

が成立する。$\varphi_{i\cdot k}\geq 0$, $(x_i, y_k)\in I+R$ を証明すればよい。帰謬法で証明しよう。今ある点(x_{i_0}, y_{k_0})で$\varphi_{i_0\cdot k_0}<0$となったとする。ここで指標i_0は$\varphi_{i\cdot k}<0$となった最初の番号。つまり$0\leq i\leq i_0-1$では$\varphi_{i\cdot k}\geq 0$であるとする。また

$$\min_k \varphi_{i_0\cdot k}=\varphi_{i_0\cdot k_0}<0 \tag{2.8}$$

と仮定する。点(x_{i_0}, y_{k_0})において不等式(2.7)の右辺を見積もってみよう。(2.7)を変形して右辺の一項目からD_1, D_2, D_3, D_4と置く。

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi_{i_0\cdot k_0}/h \\ &\geq \{f(x_{i_0}, y_{k_0}, V_{i_0\cdot k_0}, \delta V_{i_0\cdot k_0}/2\ell, \nabla^2 V_{i_0\cdot k_0+1}/\ell^2, \ell\sum_{m=0}^{k_0-1} V_{i_0-1\cdot m}) \\ &\quad -f(x_{i_0}, y_{k_0}, w_{i_0\cdot k_0}, \delta V_{i_0\cdot k_0}/2\ell, \nabla^2 V_{i_0\cdot k_0+1}/\ell^2, \ell\sum_{m=0}^{k_0-1} V_{i_0-1\cdot m})\}\end{aligned}$$

$$+\{f(x_{i_0}, y_{k_0}, w_{i_0 \cdot k_0}, \delta V_{i_0 \cdot k_0}/2l, \nabla^2 V_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k_0-1} V_{i_0-1 \cdot m})$$

$$-f(x_{i_0}, y_{k_0}, w_{i_0 \cdot k_0}, \delta w_{i_0 \cdot k_0}/2l, \nabla^2 V_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k_0-1} V_{i_0-1 \cdot m})\}$$

$$+\{f(x_{i_0}, y_{k_0}, w_{i_0 \cdot k_0}, \delta w_{i_0 \cdot k_0}/2l, \nabla^2 V_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k_0-1} V_{i_0-1 \cdot m})$$

$$-f(x_{i_0}, y_{k_0}, w_{i_0 \cdot k_0}, \delta w_{i_0 \cdot k_0}/2l, \nabla^2 w_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k_0-1} V_{i_0-1 \cdot m})\}$$

$$+\{f(x_{i_0}, y_{k_0}, w_{i_0 \cdot k_0}, \delta w_{i_0 \cdot k_0}/2l, \nabla^2 w_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k_0-1} V_{i_0-1 \cdot m})$$

$$-f(x_{i_0}, y_{k_0}, w_{i_0 \cdot k_0}, \delta w_{i_0 \cdot k_0}/2l, \nabla^2 w_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k_0-1} w_{i_0-1 \cdot m})\}$$

$$= D_1 + D_2 + D_3 + D_4$$

(2.5)(c) を使って

$$D_1 \geq C \varphi_{i_0 \cdot k_0}$$

(2.5)(b) を使って

$$D_2 \geq B|\delta \varphi_{i_0 \cdot k_0}/2l|$$

$(\varphi_{i_0 \cdot k_0+1} - \varphi_{i_0 \cdot k_0-1})/2l = \nabla^2 \varphi_{i_0 \cdot k_0+1}/2l - (\varphi_{i_0 \cdot k_0-1} - \varphi_{i_0 \cdot k_0})/l \geq 0$ のとき

$$D_2 \geq -B|\delta \varphi_{i_0 \cdot k_0}/2l|$$

$$= -(Bl/2)(\nabla^2 \varphi_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2) + B(\varphi_{i_0 \cdot k_0-1} - \varphi_{i_0 \cdot k_0+1})/l$$

$(\varphi_{i_0 \cdot k_0+1} - \varphi_{i_0 \cdot k_0-1})/2l = -\nabla^2 \varphi_{i_0 \cdot k_0+1}/2l + (\varphi_{i_0 \cdot k_0+1} - \varphi_{i_0 \cdot k_0})/l < 0$ のとき

$$D_2 \geq -(Bl/2)(\nabla^2 \varphi_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2) + B(\varphi_{i_0 \cdot k_0+1} - \varphi_{i_0 \cdot k_0})/l$$

(2.5)(a) と (2.8) より

$$D_3 \geq \alpha(\nabla^2 \varphi_{i_0 \cdot k_0+1}/l^2) \qquad (\because \varphi_{i_0 \cdot k_0+1} - 2\varphi_{i_0 \cdot k_0} + \varphi_{i_0 \cdot k_0-1} \geq 0)$$

(2.5)(d) より

$D_4 \geq El(\sum_{m=0}^{k_0-1} \varphi_{i_0-1\cdot m})$ $\qquad (\because \varphi_{i_0-1\cdot m} \geq 0 \quad m=0,1,2,\ldots,k_0-1)$

また

$\varphi_{i_0\cdot k_0-1} - \varphi_{i_0\cdot k_0} \geq 0,\ \varphi_{i_0\cdot k_0+1} - \varphi_{i_0\cdot k_0} \geq 0,\quad \varphi_{i_0\cdot k_0+1} - 2\varphi_{i_0\cdot k_0} + \varphi_{i_0\cdot k_0-1} \geq 0$

を使って 正とわかっている項を落としたりして

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \geq C\varphi_{i_0\cdot k_0} + (\alpha - lB/2)\nabla^2 \varphi_{i_0\cdot k_0+1}/l^2$$

(2.6)(イ)を使って

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \geq C\varphi_{i_0\cdot k_0}$$

$$\therefore \Delta \varphi_{i_0\cdot k_0}/h \geq C\varphi_{i_0\cdot k_0}$$

$$\therefore (1 - hC)\varphi_{i_0\cdot k_0} \geq \varphi_{i_0-1\cdot k_0}$$

これは(2.6)(ロ), $\varphi_{i_0\cdot k_0} < 0$, $\varphi_{i_0-1\cdot k_0} > 0$ に矛盾する。

次に Explicit method で立てた差分方程式に対して関数 f がどんな条件を満たさなくてはならないかを書いておこう。証明は Implicit の場合と全く同じ過程をたどることになるから省いておく。Explicit な差分方程式を次に書く。

$$\Delta w_{i\cdot k}/h = f(x_{i-1}, y_k, w_{i-1\cdot k}, \delta w_{i-1\cdot k}/2l, \nabla^2 w_{i-1\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1} w_{i-1\cdot m}) \qquad (x_i, y_k) \in I \qquad (2.9)$$

$$w_{i\cdot k} - W_{i\cdot k} = 0 \qquad (x_i, y_k) \in R$$

Explicit な場合の関数 f に対する仮定.

関数 $f(x_i, y_k, r, s, t, p)$ は $(x_i, y_k) \in I$, $-\infty < r, s, t, p < +\infty$ で定義されていて次の(a),(b),(c),(d)を満たす定数 $\alpha > 0$, $A > 0$, $B \geq 0$, $C > 0$, $E \geq 0$ が存在して mesh h, l と定数との間

には(イ),(ロ),(ハ) の関係が成立する。

(a) $\alpha(\bar{t}-t) \leq f(x_{i-1}, y_k, r, s, \bar{t}, p) - f(x_{i-1}, y_k, r, s, t, p)$

$\leq A(\bar{t}-t) \quad \bar{t} \geq t, A, \alpha > 0$

(b) $|f(x_{i-1}, y_k, r, \bar{s}, t, p) - f(x_{i-1}, y_k, r, s, t, p)| \leq B|\bar{s}-s|$

$B \geq 0$

(2.10)

(c) $-C(\bar{r}-r) \leq f(x_{i-1}, y_k, \bar{r}, s, t, p) - f(x_{i-1}, y_k, r, s, t, p)$

$\bar{r} \geq r \quad C > 0$

(d) $E(\bar{p}-p) \leq f(x_{i-1}, y_k, r, s, t, \bar{p}) - f(x_{i-1}, y_k, r, s, t, p)$

$\bar{p} \geq p \quad E \geq 0$

$2Ah/\ell^2 = \lambda$ とすると

(イ) $\lambda < 1$

(ロ) $\alpha - \ell B/2 \geq 0$ (2.11)

(ハ) $hC/(1-\lambda) < 1$

Corollary (初期値に単調に従属する解を持つ方程式)

$$\Delta u_{i\cdot k}/h = f(x_{i-1}, y_k, u_{i-1\cdot k}, \delta u_{i-1\cdot k}/2\ell, \nabla^2 u_{i-1\cdot k+1}/\ell^2, \ell \sum_{m=0}^{k-1} u_{i-1\cdot m})$$

$$(x_i, y_k) \in I \qquad (2.12)$$

$$\Delta w_{i\cdot k}/h = f(x_{i-1}, y_k, v_{i-1\cdot k}, \delta w_{i-1\cdot k}/2\ell, \nabla^2 v_{i-1\cdot k+1}/\ell^2, \ell \sum_{m=0}^{k-1} v_{i-1\cdot m})$$

$$(x_i, y_k) \in I \qquad (2.13)$$

初期値 $u_{0\cdot m} \geq v_{0\cdot m}$ $(m=0,1,2,\dots,M)$ (2.14)

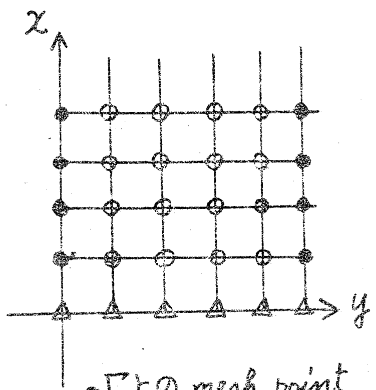
境界値 $u_{k\cdot 0} = v_{k\cdot 0}$ $u_{k\cdot M} = v_{k\cdot M}$ $(k=1.2,\dots,N)$ (2.15)

関数 f が (2.10) を満たし mesh h, l は (2.11) を満たしているとする。(2.14), (2.15) のような初期条件・境界条件のもとに Explicit method で差分方程式 (2.12), (2.13) を解くと解は

$$u_{i\cdot k} \geq v_{i\cdot k} \qquad (x_i, y_k) \in I + R$$

この Corollary の数値実験を準2次元非圧縮性流体の非定常層流境界層方程式について行なってみた。

$$\left.\begin{array}{ll} u_x = u_{yy} + \left\{1 - u^2 + (\beta+1)\left(\int_0^y u\,dy\right)u_y\right\} & (x,y)\in G \\ u(x,y) = \zeta(x,y) & (x,y)\in \Gamma \end{array}\right. \qquad (2.16)$$



●Γ上の mesh point
○Gに含まれる mesh point
△初期条件を与えた点

(2.16) が (2.10) の (a), (b), (c), (d) を満たしていることを示そう。(2.16) の解は適当な初期条件のもとに正で有界, $u_y > 0$ で有界, ということがわかっている。今 G は左図のように矩形である。与えられた式から次のようにおける。

$$f(x,y,r,s,t,p) = t + \{1 - r^2 + (\beta+1)ps\} \qquad \beta \text{は定数}$$

$\alpha = A = 1$ とおいてよい。(b) については

$$f(x,y,r,\bar{s},t,p) - f(x,y,r,s,t,p) = (\beta+1)p(\bar{s} - s)$$

(2.16) の解が正で有界, 有界領域であることから (b) は満た

されている。(c) については

$$f(x,y,\bar{r},s,t,p)-f(x,y,r,s,t,p)=-(\bar{r}-r)(\bar{r}+\bar{r})$$

$-(\bar{r}+r)(\bar{r}-r)>-C(\bar{r}-r)$ なる定数 C の存在は保証される。

$s=u_y>0$ であることから (d) もよい。

次の数値実験の表をのせておく。ここでは $\beta=1$ とした。

(表の上段を時間方向 2000 ステップまで計算したところ 1400 ステップでサチュレイトした。)

→ 空間方向
↓ 時間方向

上段 $v_{00}=1$　　$v_{0k}=1$　　$2\leq k\leq 61$
中段 $v_{00}=1/2$　　$v_{0k}=1$　　$2\leq k\leq 61$
下段 $v_{00}=1/4$　　$v_{0k}=1$　　$2\leq k\leq 61$

$h/\ell^2=(0.001)/(0.05)^2=0.4$

時間方向	1 (境界値)	2	3	4	21	31	41	51	61 (境界値)
10	0.0000000	0.2839088 上	0.5336546	0.7272242	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
10	0.0000000	0.2775510 中	0.5228657	0.7153113	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
10	0.0000000	0.2711630 下	0.5120252	0.7033398	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
20	0.0000000	0.2036792	0.3933831	0.5596567	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
20	0.0000000	0.2013694	0.3891670	0.5542308	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
20	0.0000000	0.1990476	0.3849287	0.5487763	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
30	0.0000000	0.1686159	0.3285168	0.4742467	0.9999895	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
30	0.0000000	0.1673621	0.3261609	0.4710627	0.9999870	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
30	0.0000000	0.1661015	0.3237920	0.4678611	0.9999845	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
40	0.0000000	0.1480312	0.2895725	0.4210084	0.9998240	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
40	0.0000000	0.1472246	0.2880341	0.4188770	0.9998054	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
40	0.0000000	0.1464133	0.2864869	0.4167335	0.9997867	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
50	0.0000000	0.1342033	0.2630923	0.3840686	0.9991815	0.9999997	1.0000000	1.0000000	1.0000000
50	0.0000000	0.1336331	0.2619951	0.3825255	0.9991307	0.9999997	1.0000000	1.0000000	1.0000000
50	0.0000000	0.1330596	0.2608915	0.3809733	0.9990796	0.9999996	1.0000000	1.0000000	1.0000000
60	0.0000000	0.1241582	0.2437094	0.3566831	0.9978026	0.9999969	1.0000000	1.0000000	1.0000000
60	0.0000000	0.1237304	0.2428811	0.3555064	0.9977114	0.9999966	1.0000000	1.0000000	1.0000000
60	0.0000000	0.1233000	0.2420479	0.3543227	0.9976195	0.9999962	1.0000000	1.0000000	1.0000000
70	0.0000000	0.1164770	0.2288097	0.3354468	0.9956013	0.9999843	1.0000000	1.0000000	1.0000000
70	0.0000000	0.1161424	0.2281591	0.3345159	0.9954696	0.9999832	1.0000000	1.0000000	1.0000000
70	0.0000000	0.1158057	0.2275046	0.3335793	0.9953370	0.9999821	1.0000000	1.0000000	1.0000000
80	0.0000000	0.1103860	0.2159496	0.3184343	0.9926263	0.9999494	1.0000000	1.0000000	1.0000000
80	0.0000000	0.1101162	0.2154234	0.3176774	0.9924590	0.9999467	1.0000000	1.0000000	1.0000000
80	0.0000000	0.1098448	0.2148939	0.3169157	0.9922904	0.9999440	0.9999999	1.0000000	1.0000000
90	0.0000000	0.1054236	0.2072586	0.3044656	0.9889947	0.9998763	0.9999998	1.0000000	1.0000000
90	0.0000000	0.1052010	0.2068234	0.3038368	0.9887985	0.9998714	0.9999997	1.0000000	1.0000000
90	0.0000000	0.1049770	0.2063854	0.3032041	0.9886008	0.9998663	0.9999997	1.0000000	1.0000000
190	0.0000000	0.0818079	0.1608251	0.2367676	0.9407967	0.9952791	0.9998425	0.9999979	1.0000000
190	0.0000000	0.0817466	0.1607040	0.2365895	0.9405632	0.9952394	0.9998402	0.9999979	1.0000000
190	0.0000000	0.0816849	0.1605820	0.2364102	0.9403279	0.9951994	0.9998378	0.9999978	1.0000000
290	0.0000000	0.0735508	0.1444795	0.2126658	0.9012165	0.9860469	0.9989615	0.9999609	1.0000000
290	0.0000000	0.0735238	0.1444259	0.2125866	0.9010561	0.9859989	0.9989553	0.9999605	1.0000000
290	0.0000000	0.0734966	0.1443719	0.2125068	0.9008946	0.9859506	0.9989491	0.9999602	1.0000000
390	0.0000000	0.0695702	0.1365810	0.2009735	0.8750207	0.9770562	0.9975345	0.9998509	1.0000000
390	0.0000000	0.0695559	0.1365527	0.2009316	0.8749169	0.9770157	0.9975270	0.9998502	1.0000000
390	0.0000000	0.0695416	0.1365242	0.2008894	0.8748122	0.9769750	0.9975193	0.9998495	1.0000000
490	0.0000000	0.0673764	0.1322228	0.1945096	0.8580861	0.9699529	0.9960524	0.9996906	1.0000000
490	0.0000000	0.0673681	0.1322065	0.1944853	0.8580189	0.9699225	0.9960454	0.9996897	1.0000000
490	0.0000000	0.0673599	0.1321900	0.1944609	0.8579512	0.9698920	0.9960384	0.9996889	1.0000000
590	0.0000000	0.0660776	0.1296410	0.1906759	0.8470901	0.9647652	0.9947795	0.9995219	1.0000000
590	0.0000000	0.0660726	0.1296310	0.1906612	0.8470463	0.9647436	0.9947738	0.9995211	1.0000000
590	0.0000000	0.0660675	0.1296210	0.1906463	0.8470021	0.9647218	0.9947681	0.9995202	1.0000000
690	0.0000000	0.0652750	0.1280448	0.1883042	0.8398910	0.9611085	0.9937853	0.9993719	1.0000000
690	0.0000000	0.0652718	0.1280386	0.1882949	0.8398622	0.9610934	0.9937810	0.9993713	1.0000000
690	0.0000000	0.0652687	0.1280323	0.1882856	0.8398332	0.9610782	0.9937767	0.9993706	1.0000000
790	0.0000000	0.0647652	0.1270308	0.1867968	0.8351430	0.9585768	0.9930470	0.9992510	1.0000000
790	0.0000000	0.0647632	0.1270268	0.1867909	0.8351239	0.9585665	0.9930459	0.9992505	1.0000000
790	0.0000000	0.0647612	0.1270227	0.1867849	0.8351047	0.9585560	0.9930428	0.9992500	1.0000000
890	0.0000000	0.0644356	0.1263749	0.1858215	0.8319932	0.9568416	0.9925208	0.9991591	1.0000000
890	0.0000000	0.0644342	0.1263723	0.1858176	0.8319805	0.9568345	0.9925186	0.9991587	1.0000000
890	0.0000000	0.0644329	0.1263696	0.1858137	0.8319678	0.9568274	0.9925163	0.9991583	1.0000000
990	0.0000000	0.0642197	0.1259454	0.1851827	0.8298948	0.9556594	0.9921494	0.9990919	1.0000000
990	0.0000000	0.0642189	0.1259437	0.1851801	0.8298864	0.9556546	0.9921479	0.9990916	1.0000000
990	0.0000000	0.0642180	0.1259419	0.1851776	0.8298778	0.9556497	0.9921463	0.9990913	1.0000000

§3　境界値の定理

Implicitな方法でたてた差分方程式が(2.5)，(2.6)を満たしExplicit methodで立てた差分方程式が(2.10)，(2.11)を満たしているとする。すると解は境界上の最大値．最小値でおさえられ(境界値の定理)るということが明らかになる。

Implicit methodによる差分方程式の境界値の定理

差分方程式(2.1)が(2.5)，(2.6)を満たすとする。

$(x_i, y_k) \in I+R$ に対し i にだけ従属する実数値集合 $\{g_i\}$，$\{G_i\}$ があるとする。

境界値の定理

$(x_i, y_k) \in I+R$ で任意の実数値集合 $\{V_{i.k}\}$ が次の不等式を満たすとする。

$$\Delta g_i/h \leq f(x_i, y_k, V_{i.k}, 0, 0, l\sum_{m=0}^{k-1} V_{i-1.m}) \leq \Delta G_i/h \qquad (3.1)$$

(2.1)の境界値 $W_{i.k}$ に対し，ある定数 μ，M があって，

$$\mu + g_i \leq W_{i.k} \leq M + G_i \qquad (x_i, y_k) \in R \qquad (3.2)$$

$W_{i.k}$ はR上で $\mu+g_i$，$M+G_i$ となることがあるものとする。この時差分方程式(2.1)の解 $w_{i.k}$ は次のような範囲に閉じ込められる。

$$\mu + g_i \leq w_{i.k} \leq M + G_i \qquad (x_i, y_k) \in I+R \qquad (3.3)$$

[証明]

$V_{i.k} = M + G_i$，$v_{i.k} = \mu + g_i$ と置けばよい。

§4 差分方程式の Errors の評価

Nagumo Westphal の補助定理を再び使い差分方程式の discritization を含んだ解と厳密解との誤差を評価する。誤差 $u_{i\cdot k}-w_{i\cdot k}$ に対する優関数 劣関数がある常微分方程式を解くことによって求められることが明らかになる。

次のような表示を使う。

$$f(x_i, y_k, w_{i\cdot k}, \delta w_{i\cdot k}/2l, \nabla^2 w_{i\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1} w_{i-1\cdot m}) \equiv f[w_{i\cdot k}] \quad (4.1)$$

ここで $f(x_i, y_k, r, s, t, p)$ は $(x_i, y_k)\in I, -\infty<r, s, t, p<+\infty$ で定義されているとする。すると (2.1) の差分方程式は

$$\begin{aligned} &\Delta w_{i\cdot k}/h - f[w_{i\cdot k}] = 0 && (x_i, y_k)\in I \\ &w_{i\cdot k} - W_{i\cdot k} = 0 && (x_i, y_k)\in R \end{aligned} \quad (4.2)$$

次に I+R で求められた近似解 $u_{i\cdot k}$ が次の算式を成立させているとする。

$$\begin{aligned} &\Delta u_{i\cdot k}/h - f[u_{i\cdot k}] = \delta_{i\cdot k} && (x_i, y_k)\in I \\ &u_{i\cdot k} - W_{i\cdot k} = \varepsilon_{i\cdot k} && (x_i, y_k)\in R \end{aligned} \quad (4.3)$$

差分方程式の真の解を $w_{i\cdot k}$ とした時、$u_{i\cdot k}-w_{i\cdot k}$ を $\delta_{i\cdot k}$, $\varepsilon_{i\cdot k}$ を使って評価しようというのがこの節のねらいである。$u_{i\cdot k}-w_{i\cdot k}$ に対する優関数劣関数を作ってゆく。ここで $\delta_{i\cdot k}$ と $\varepsilon_{i\cdot k}$ は h には独立した次のような大まかな数で見積もられているとする。

$$Q_i \le \delta_{i\cdot k} \le \Theta_i \qquad (x_i, y_k) \in I$$
$$e_i \le \varepsilon_{i\cdot k} \le E_i \qquad (x_i, y_k) \in R \qquad (4.4)$$

定理

$w_{i\cdot k}$ は差分方程式 (2.1) の理論上の解. $u_{i\cdot k}$ は誤差が $\varepsilon_{i\cdot k}$, $\delta_{i\cdot k}$ である近似解 (つまり実際は discritization による errors を含んだ解) であるとする。さらに関数 f は (2.5), (2.6) を満たすとする。さらに f に対し次のような関数 $\Omega(x)$ が存在するとする。

$$f(x_i, y_k, r, s, t, \bar{p}) - f(x_i, y_k, r, s, t, p) \le \Omega(x_i)(\bar{p} - p) \qquad \bar{p} \ge p \qquad (4.5)$$

上の関数 $\Omega(x_i)$ に対し、ある数値集合 $\{q_i\}$, $\{Q_i\}$ が存在して次の式を満たしているとする。

(a) $\Delta q_i / h \le -C|q_i| - T\Omega(x_i)|q_{i-1}| - \Theta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$

(b) $q_i \le \min(-E_i, 0) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, m)$ (4.6)

(a) $\Delta Q_i / h \ge CQ_i + T\Omega(x_i) Q_{i-1} - Q_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$

(b) $Q_i \ge \max(-e_i, 0) \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, m)$ (4.7)

T; y 方向の最大の長さ。C; (2,5) (C) の定数と同一のもの。

すると $w_{i\cdot k} - u_{i\cdot k}$ は次のような範囲にある。

$$q_i \le w_{i\cdot k} - u_{i\cdot k} \le Q_i \qquad (x_i, y_k) \in I + R \qquad (4.8)$$

[註] 数値集合 $\{q_i\}$, $\{Q_i\}$ をもめるには実際は $dy/dx = Cy + T\Omega(x)y - \Theta(x)$ という常微分方程式を解く。尚 $\{C + T\Omega(x)\}y$ は連続でなくてはならない。

[証明]

(4.8) の右辺をまず証明しよう。

$$V_{i\cdot k} = a_i + u_{i\cdot k} \tag{4.9}$$

と置くとこの $V_{i\cdot k}$ に対し (2.2) が満たされることを示そう。

まず $(x_i, y_k) \in I$ に対し (4.9) から

$$\begin{aligned}
&\Delta V_{i\cdot k}/h - f[V_{i\cdot k}] \\
&= \Delta a_i/h + \Delta u_{i\cdot k}/h - f\Big(x_i, y_k, a_i + u_{i\cdot k}, \delta u_{i\cdot k}/2l, \nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1}(a_i + u_{i-1\cdot m})\Big) \\
&= \Delta a_i/h + \Delta u_{i\cdot k}/h \\
&\quad - \Big\{f\Big(x_i, y_k, a_i + u_{i\cdot k}, \delta u_{i\cdot k}/2l, \nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1}(a_i + u_{i-1\cdot m})\Big) \\
&\quad - f\Big(x_i, y_k, u_{i\cdot k}, \delta u_{i\cdot k}/2l, \nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1}(a_i + u_{i-1\cdot m})\Big)\Big\} \\
&\quad - \Big\{f\Big(x_i, y_k, u_{i\cdot k}, \delta u_{i\cdot k}/2l, \nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1}(a_i + u_{i-1\cdot m})\Big) \\
&\quad - f\Big(x_i, y_k, u_{i\cdot k}, \delta u_{i\cdot k}/2l, \nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1}(u_{i-1\cdot m})\Big)\Big\} \\
&\quad - f\Big(x_i, y_k, u_{i\cdot k}, \delta u_{i\cdot k}/2l, \nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2, l\sum_{m=0}^{k-1} u_{i-1\cdot m}\Big)
\end{aligned}$$

(2.5) (c) において $\bar{r} - r = a_i$ と考え (4.7) (b) より $a_i \geq 0$。
また (4.5) (b) において $\bar{p} - p = l\sum_{m=0}^{k-1}(a_{i-1} + u_{i-1\cdot m}) - l\sum_{m=0}^{k-1} u_{i-1\cdot m}$
$= k l a_{i-1} \geq 0$。 さらに (4.3), (4.4) から

$$\Delta u_{i\cdot k}/h - f[u_{i\cdot k}] = \delta_{i\cdot k} \geq a_i \qquad (x_i, y_k) \in I$$

従って

$$\begin{aligned}
&\Delta V_{i\cdot k}/h - f[V_{i\cdot k}] \\
&\geq \Delta a_i/h + a_i - c\,a_i - L(x_i)\,k l\,a_{i-1} \qquad (x_i, y_k) \in I \qquad (4.10) \\
&\geq \Delta a_i/h + a_i - c\,a_i - T L(x_i)\,a_{i-1}
\end{aligned}$$

これは(4.7)(a)より正である。

次に$(x_i, y_k) \in R$のときを考えてみよう。(4.3), (4.9)より

$$V_{i\cdot k} - W_{i\cdot k} = Q_i + \varepsilon_{i\cdot k}$$

(4.7)(b)より

$$Q_i + \varepsilon_{i\cdot k} \geq Q_i + e_i \geq 0 \quad \text{すべての} (x_i, y_k) \in R \qquad (4.11)$$

(4.10), (4.11)より

$$\Delta V_{i\cdot k}/k - f[V_{i\cdot k}] \geq 0 \qquad \text{すべての} (x_i, y_k) \in I+R$$

したがって

$$V_{i\cdot k} = Q_i + u_{i\cdot k}$$

は(4.2)の理論上の解$v_{i\cdot k}$の優関数であり、これから(4.8)の右辺が出る。左辺の証明は$v_{i\cdot k} = u_{i\cdot k} + q_i$と置き(4.7)のかわりに(4.6)を使って全く同じ過程をたどることになる。

§5 Truncation Errors の評価

$$\begin{aligned} & z_x - f(x, y, z, z_y, z_{yy}, \textstyle\int z\,dy) = 0 && (x, y) \in G \\ & z - \zeta(x, y) = 0 && (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \qquad (5.1)$$

$u(x, y)$は(5.1)の$G+\Gamma$において連続な解でGでu_x, u_{xx}, u_y, u_{yyy}, u_{yyyy}が存在して有界であるとする。実数値集合$u(x_i, y_k) = u_{i\cdot k}$ $(x_i, y_k) \in I+R$を差分方程式(2.1)の近似解と考え(4.3)の$\varepsilon_{i\cdot k}$, $\delta_{i\cdot k}$の限界が(4.4)であると予る。ここでは与えられた微分方程式の解に必要な滑らかさがあれ

ば、Truncation errors に対する(4.4)の $\theta_i, \Theta_i, e_i, E_i$ は h, l が小さくなるにつれて小さくなるのだということを示そう。

Implicit な差分方程式における Trancation Errors.

(a) $(u_x)_{i \cdot k} - \Delta u_{i+1 \cdot k}/h = r_1(x_i, y_k) \qquad (x_i, y_k) \in I$

(b) $(u_y)_{i \cdot k} - \delta u_{i \cdot k}/2l = r_2(x_i, y_k) \qquad (x_i, y_k) \in I$

(c) $(u_{yy})_{i \cdot k} - \nabla^2 u_{i \cdot k+1}/l^2 = r_3(x_i, y_k) \qquad (x_i, y_k) \in I$

(d) $(\int u dy)_{i \cdot k} - l \sum_{m=0}^{k-1} u_{i-1 \cdot m} = r_4(x_i, y_k) \qquad (x_i, y_k) \in I$

$$|r_j(x_i, y_k)| \leq R_j \qquad (j=1,2,3,4) \quad (x_i, y_k) \in I \qquad (5.2)$$

関数 $u_x, u_{xx}, u_y, u_{yyy}, u_{yyyy}$ が G で有界であることが仮定されれば R_j も $(j=1,2,3,4)$ 有界であることが示される。 $u_{i+1 \cdot k} = u_{i \cdot k} + h(u_x)_{i \cdot k} + (h^2/2!)(u_{xx})_{i \cdot k} + \cdots\cdots$

$\therefore \ r_1 = (u_x)_{i \cdot k} - (u_{i+1 \cdot k} - u_{i \cdot k})/h = -h(\widetilde{u_{xx}})_{i \cdot k}/2$

$\widetilde{u_{xx}}$ は $[x_i, x_{i+1}]$ の中間値

(α) $u_{i \cdot k+1} = u_{i \cdot k} + l(u_y)_{i \cdot k} + l^2(u_{yy})_{i \cdot k}/2!$
$\qquad + l^3(u_{yyy})_{i \cdot k}/3! + l^4(u_{yyyy})_{i \cdot k}/4!$

(β) $u_{i \cdot k-1} = u_{i \cdot k} - l(u_y)_{i \cdot k} + l^2(u_{yy})_{i \cdot k}/2!$
$\qquad - l^3(u_{yyy})_{i \cdot k}/3! + l^4(u_{yyyy})_{i \cdot k}/4!$

(α)−(β) より

$u_{i \cdot k+1} - u_{i \cdot k-1} = 2l(u_y)_{i \cdot k} + 2l^3(u_{yyy})_{i \cdot k}/3! + \cdots\cdots$

$\therefore \ r_2 = (u_y)_{i \cdot k} - \delta u_{i \cdot k}/2l = -l^2(\widetilde{u_{yyy}})_{i \cdot k}/6$

$(\alpha)+(\beta)$ より

$\therefore\ r_3=(u_{yy})_{i\cdot k}-\nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2=-l^2(\widetilde{u}_{yyyy})_{i\cdot k}/4!$

次に r_4 を考える。

$$\left|\left(\int u\,dy\right)_{i\cdot k}-l\sum_{m=0}^{k-1}u_{i-1\cdot m}\right|\le l\sum_{m=0}^{k-1}\left|u(x_i,y_m^{(1)})-u(x_{i-1},y_m^{(2)})\right|$$

ここで $y_m^{(1)},\ y_m^{(2)}\in[y_m,\ y_{m+1}]$ で $|u(x_i,y_m^{(1)})-u(x_{i-1},y_m^{(2)})|$ を最大にさせる値。

$$l\sum_{m=0}^{k-1}|u(x_i,y_m^{(1)})-u(x_{i-1},y_m^{(2)})|\le l\sum_{m=0}^{k-1}|u(x_i,y_m^{(1)})-u(x_i,y_m^{(2)})|$$
$$+l\sum_{m=0}^{k-1}|u(x_i,y_m^{(1)})-u(x_{i-1},y_m^{(2)})|=l^2\sum_{m=0}^{k-1}|(\widetilde{u}_y)_{i\cdot m}|+lh\sum_{m=0}^{k-1}|(\widetilde{u}_x)_{i-1\cdot m}|$$

$(\widetilde{u}_y)_{i\cdot m}$ は $(\widetilde{u}_x)_{i-1\cdot m}$ はそれぞれ中間値. $\therefore\ r_4=O(l)$

もし t について単調増大な関数 $\Phi(t)$ について

$$f(x_i,y_k,r,s,\bar{t},p)-f(x_i,y_k,r,s,t,p)\le\Phi(\bar{t}-t)\qquad \bar{t}\ge t \quad (5.3)$$

という仮定が (2・5)(a)に加えてもうけられるならば

$$r_1+\Delta u_{i\cdot k}/h-f(x_i,y_k,u_{i\cdot k},\delta u_{i\cdot k}/2l,\nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2,l\sum_{m=0}^{k-1}u_{i-1\cdot m})$$
$$=f(x_i,y_k,u_{i\cdot k},\delta u_{i\cdot k}/2l+r_2,\nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2+r_3,(l\sum_{m=0}^{k-1}u_{i-1\cdot m})+r_4)$$
$$-f(x_i,y_k,u_{i\cdot k},\delta u_{i\cdot k}/2l,\nabla^2 u_{i\cdot k+1}/l^2,l\sum_{m=0}^{k-1}u_{i-1\cdot m})$$

$$\therefore\ |\Delta u_{i\cdot k}/h-f[u_{i\cdot k}]|\le R_1+BR_2+\Phi(R_3)+\Omega(x_i)R_4\le D_1\ (x_i,y_k)\in I$$

[註] $\Omega(x_i)$ は一様に有界であるとする。

次に境界での誤差を考えてみよう。矩形領域だと、境界Γ上に差分領域の境界点がすべてのっていると考えられるから矩形の場合境界での誤差はないものと考えてよい。一般的領域については追補に書いておく。

§4 の定理を使えば

$$\begin{aligned} &\Delta Q_i/h \geq CQ_i + \Omega(x_i)Q_{i-1} + D_1 && (i=1,2,\cdots,m) \\ &Q_i \geq 0 && (i=0,1,2,\cdots,m) \end{aligned} \quad (5.4)$$

であるような数値集合 $\{Q_i\}$ に対し

$$|w_{i \cdot k} - u_{i \cdot k}| \leq Q_i$$

§6 差分方程式の解の微分方程式の解への収束

差分 $h\to 0$ とした時差分方程式の解が微分方程式の解へ収束するかどうかということを考える。ここで

$$l = l(h) \qquad \lim_{h\to 0} l(h) = 0 \tag{6.1}$$

を満すような関数 $l(h)$ が選ばれているとする。(5.3) で明らかにされた誤差 D_1, D_2 が $h\to 0$ とした時どうなるか調べる。

$$\gamma_1 = (-h/2)\widehat{u_{xx}}, \quad \gamma_2 = -(l^2/6)\widetilde{u_{yyy}}, \quad \gamma_3 = (-l^2/12)\widetilde{u_{yyyy}}, \quad \gamma_4 = O(l)$$

$u_x, u_{xx}, u_y, u_{yyy}, u_{yyyy}$ が G で有界であることが仮定されれば、γ_j は h に従属し

$$\lim_{h\to 0} \gamma_j = 0 \qquad (j=1,2,3,4) \tag{6.2}$$

(5.3) の $\Phi(\bar{t}-t)$ に対し $\lim_{\bar{t}\to t} \Phi(\bar{t}-t) = 0$ を満すような Φ であるとする。すると (5.4) の D_1 は h に従属し、かつ

$$\lim_{h\to 0} D_1(h) = 0$$

であることが出てくる。(5.5) から誤差を評価する Q_i は h の関数であることが予想され

$\bar{Q}(h) = \max\{Q_i(h)\}$　　　$(i = 0, 1, 2, \cdots, m)$

と置くとき差分方程式が微分方程式の解に収束するとは次のように言える。それは

$$\lim_{h \to 0} \bar{Q}(h) = 0$$

定理

$f(x, y, r, s, t, p)$ は (2.5) を満たし $\Omega(x)$ に関しては (4.5) を満している。$\Omega(x)Z$, $\Omega(x)$ は連続であるとする。

また $\bar{h} > 0$ に対し $h \leq \bar{h}$ なるすべての h に対し $l = l(h)$ が (2.6), (6.1) を満すものとする。

関数 $Z(x)$ を次のような初期値問題の解とする。

$$\begin{aligned} Z'(x) &= cZ + \Omega(x) Z \\ Z(x_0) &= 0 \end{aligned} \qquad (6.3)$$

この $Z(x)$ が $[x_0, x_0 + mh]$ で $Z(x) \equiv 0$ であるならば差分法は収束する。

Refference

[1] Rudolf Krawczyk; Über Differenzenverfahren bei parabolischen Differentialgleichung; Arch Rational Mech. Anal. Vol. 13.

[2] Leonard D. Peterson and Clair G. Maple; Stability of Solution of Nonlinear Diffusion Problems.

[3] Karl Nickel; Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandlschen Grenzchicht Differentialgleichung; Arch Rational Mech. Anal. Vol. 2.

[4] Karl Nickel; Fehlerabschätzungen bei parabolischen Differential gleichungen. Math.Zeitschr 71 268-282(1959).

追　補

矩形領域と仮定したがこれがもっと一般的な領域について、考えてみる。図2のような領域の場合。

差分方程式の定義された領域で内点，境界点とは次のように定義される。 Explicit method では

$$I^* = \{(x_i, y_k);\ (x_{i-1}, y_{k+1}) \in G+\Gamma,\ (x_{i-1}, y_k) \in G+\Gamma,\ (x_{i-1}, y_{k-1}) \in G+\Gamma\}$$

Implicit method では

$$I = \{(x_i, y_k);\ (x_i, y_{k+1}) \in G+\Gamma,\ (x_{i-1}, y_k) \in G+\Gamma,\ (x_i, y_{k-1}) \in G+\Gamma\}$$

一般点領域では 図2 のように用いる scheme によって内点，境界点は異なる。

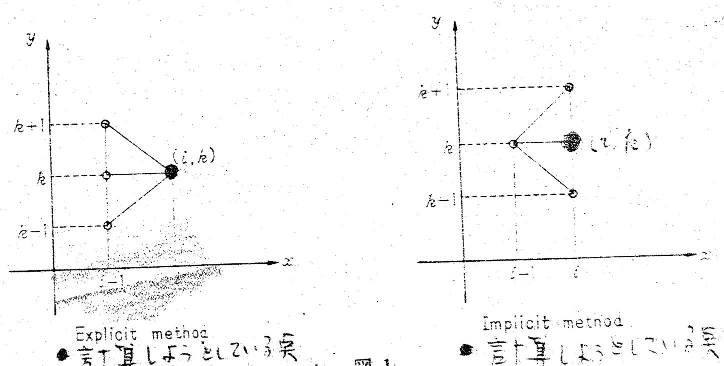


図 1

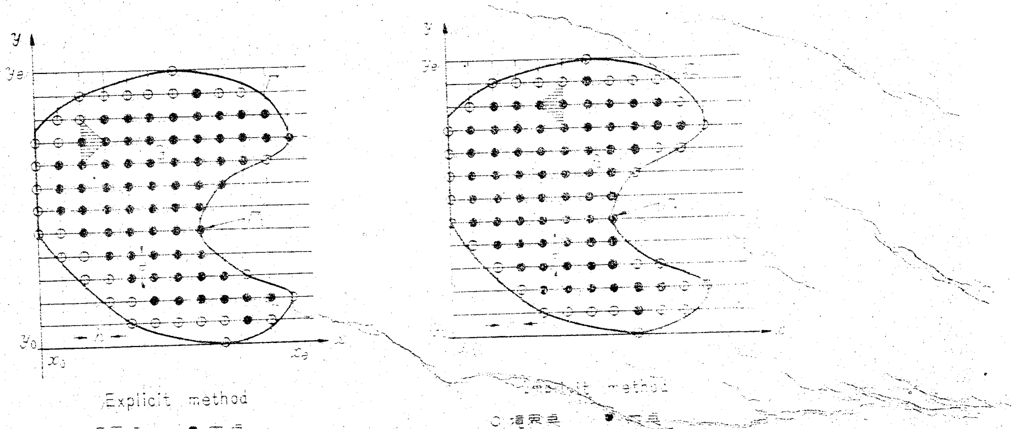


図 2

差分方程式(2.1)の関数 f の argument $l\sum_{m=0}^{k-1}u_{i-1\cdot m}$ は $\int u\,dy$ の近似として矩形領域の場合におかれているものである。図3のような一般的領域の場合は $\int u\,dy$ の近似として $l\sum_{m=m(i-1)}^{k-1}u_{i-1\cdot m}$ と置かなくてはならない。

m が i の関数になるわけである。

差分領域の境界点がΓ上にない場合が多い。こういう時には差分領域の境界点に対し、対応した境界値が与えられなくてはならないが、その対応ずけは次のように行う。

右図をみれば、明らかなように、Γ上にあって、三角形 (x_i, y_k), (x_{i-1}, y_{k+1}), (x_{i+1}, y_{k-1}) の内部にある $\bar{Q}(\bar{x}_i, \bar{y}_k)$ を見い出してきて $g(\bar{x}_i, \bar{y}_k) = W_{i\cdot k}$ とする(Explicitの場合)。

$|x_i - \bar{x}_i| \leq h$, $|y_k - \bar{y}_k| \leq l$ であることも明らか。

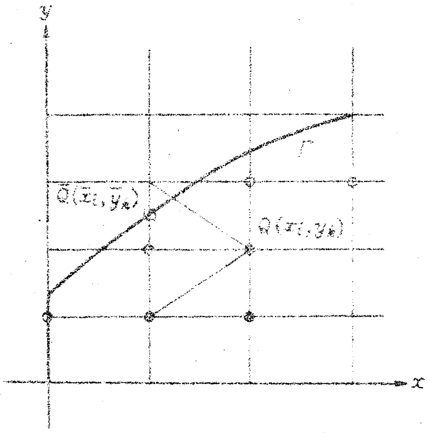


図 3